

K Lineair programmeren

Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Bladzijde 131

1 $p: 3x - y = 6$

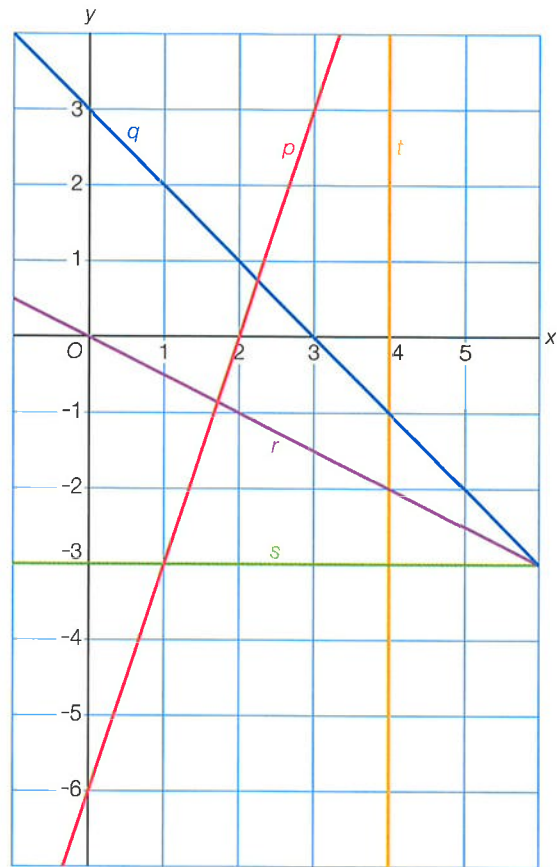
x	0	2
y	-6	0

$q: x + y = 3$

x	0	3
y	3	0

$r: x + 2y = 0$

x	0	2
y	0	-1



2 $l: 5x - 3y = 75$

$y = 0$ geeft $5x = 75$, dus $x = 15$ en snijpunt x -as is $(15, 0)$.

$x = 0$ geeft $-3y = 75$, dus $y = -25$ en snijpunt y -as is $(0, -25)$.

$m: 18x + y = 450$

$y = 0$ geeft $18x = 450$, dus $x = 25$ en snijpunt x -as is $(25, 0)$.

$x = 0$ geeft $y = 450$ en snijpunt y -as is $(0, 450)$.

$n: y = 320$ horizontale lijn, dus geen snijpunt x -as en snijpunt y -as is $(0, 320)$

$p: x = 185$ verticale lijn, dus geen snijpunt y -as en snijpunt x -as is $(185, 0)$

$q: 3x - 10y = 7500$

$y = 0$ geeft $3x = 7500$, dus $x = 2500$ en snijpunt x -as is $(2500, 0)$.

$x = 0$ geeft $-10y = 7500$, dus $y = -750$ en snijpunt y -as is $(0, -750)$.

$r: 0,2x + 0,3y = 600$

$y = 0$ geeft $0,2x = 600$, dus $x = 3000$ en snijpunt x -as is $(3000, 0)$.

$x = 0$ geeft $0,3y = 600$, dus $y = 2000$ en snijpunt y -as is $(0, 2000)$.

3 a $p: 5x - 12y = c$
door $(51, 70)$ $c = 5 \cdot 51 - 12 \cdot 70 = -585$

Dus $p: 5x - 12y = -585$.

b $q: 0,05x + 0,32y = c$
door $(820, 7000)$ $c = 0,05 \cdot 820 + 0,32 \cdot 7000 = 2281$

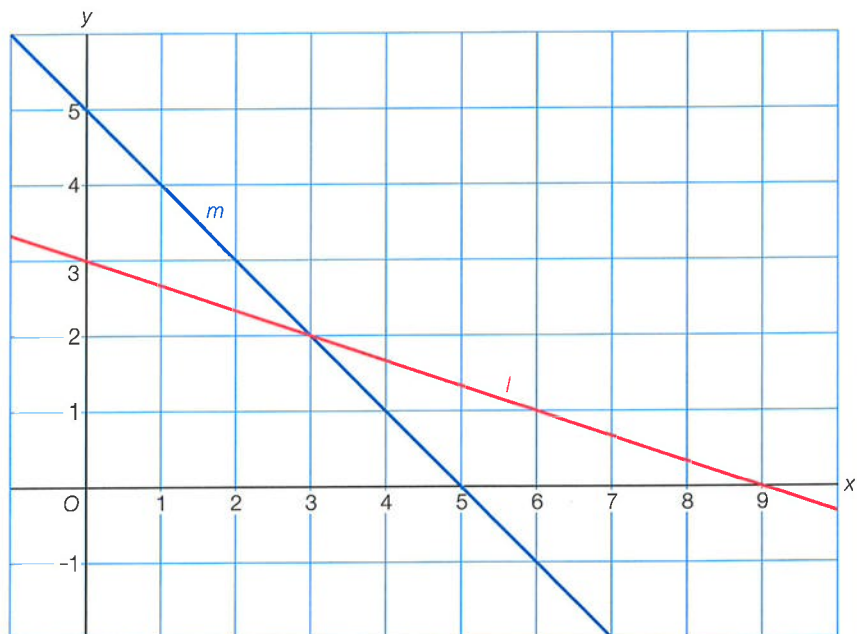
Dus $q: 0,05x + 0,32y = 2281$.

Bladzijde 132

- 4** a x = aantal muntstukken van 1 euro
 y = aantal muntstukken van 50 eurocent
 Je krijgt $x + 0,5y = 260$.
- b x = aantal stoelen
 y = aantal tafels
 Je krijgt $350x + 850y = 22\,000$.
- c x = aantal keer 100 gram cashewnoten
 y = aantal keer 100 gram studentenhaver
 Je krijgt $4x + 7y = 12,80$.
- d x = aantal ha groenten
 y = aantal ha granen
 Je krijgt $20\,000x + 15\,000y = 540\,000$.
- 5** a x = aantal fietsen dat op de binnenplaats kan
 y = aantal bromfietsen dat op de binnenplaats kan
 Je krijgt $x + 2y = 180$.
- b Er geldt $x = 4y$.
 Invullen van $x = 4y$ in $x + 2y = 180$ geeft $4y + 2y = 180$
 $6y = 180$
 $y = 30$
 $y = 30$ geeft $x = 4 \cdot 30 = 120$
 Er staan 120 fietsen op de binnenplaats.

K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen**Bladzijde 133**

- 1** a $l: x + 3y = 9$
- | | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 9 |
| y | 3 | 0 |
- $m: x + y = 5$
- | | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 5 |
| y | 5 | 0 |



- b Het snijpunt is (3, 2).

Bladzijde 134

- 2** a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$ +
 $4x = -20$, dus $x = -5$
 Invullen van $x = -5$ in $-x + 4y = -12$ geeft $5 + 4y = -12$
 $4y = -17$
 $y = -4\frac{1}{4}$
 Dus $x = -5$ en $y = -4\frac{1}{4}$.

$$\text{b } \begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -2y = 8, \text{ dus } y = -4 \end{array}$$

Invullen van $y = -4$ in $-2x + y = 7$ geeft $-2x - 4 = 7$

$$\begin{array}{r} -2x = 11 \\ x = -5\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $x = -5\frac{1}{2}$ en $y = -4$.

$$\text{c } \begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} + \\ -3x = -9, \text{ dus } x = 3 \end{array}$$

Invullen van $x = 3$ in $-x - 3y = -8$ geeft $-3 - 3y = -8$

$$\begin{array}{r} -3y = -5 \\ y = 1\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $x = 3$ en $y = 1\frac{2}{3}$.

- 3 a** Optellen geeft $5x - y = 23$.
Er is geen variabele geëlimineerd.
- b** Aftrekken geeft $x - 7y = -9$.
Er is geen variabele geëlimineerd.

Bladzijde 135

$$\text{4 a } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y = -7 \\ 10x + 5y = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} - \\ -7x = -7, \text{ dus } x = 1 \\ 2x + y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 + y = 0 \\ y = -2 \end{array}$$

De oplossing is $x = 1$ en $y = -2$.

$$\text{b } \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3x - 6y = 9 \\ 3x - y = 19 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} - \\ -5y = -10, \text{ dus } y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 4 = 3 \\ x = 7 \end{array}$$

De oplossing is $x = 7$ en $y = 2$.

$$\text{5 a } \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 69 \\ 5x + 15y = -35 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} - \\ -13y = 104, \text{ dus } y = -8 \\ x + 3y = -7 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 24 = -7 \\ x = 17 \end{array}$$

De oplossing is $x = 17$ en $y = -8$.

$$\text{b } \left\{ \begin{array}{l} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 2,4x + 0,6y = 3 \\ 0,6x - 0,6y = 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} + \\ 3x = 6, \text{ dus } x = 2 \\ 0,8x + 0,2y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1,6 + 0,2y = 1 \\ 0,2y = -0,6 \\ y = -3 \end{array}$$

De oplossing is $x = 2$ en $y = -3$.

6 a $p: 12x + 5y = 5$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 1 & -3,8 \end{array}$$

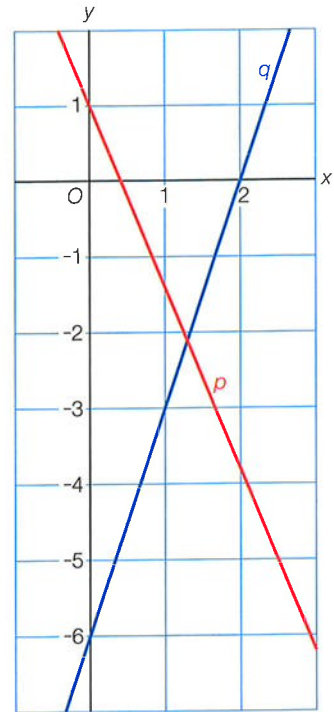
$q: 3x - y = 6$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & -6 & 0 \end{array}$$

b Je moet het stelsel $\begin{cases} 12x + 5y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$ oplossen.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 12x + 5y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \begin{array}{l} |1 \\ |5 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 12x + 5y = 5 \\ 15x - 5y = 30 \end{cases} + \\ \hline 27x = 35, \text{ dus } x = 1\frac{8}{27} \\ 3x - y = 6 \\ -y = 2\frac{1}{9} \\ y = -2\frac{1}{9} \end{array}$$

Het snijpunt is $(1\frac{8}{27}, -2\frac{1}{9})$.



Bladzijde 136

7 $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + 4y = 38 \end{cases} \begin{array}{l} |2 \\ |1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = -24 \\ x + 4y = 38 \end{cases} +$

$$\begin{array}{l} 7x = 14, \text{ dus } x = 2 \\ x + 4y = 38 \\ 4y = 36 \\ y = 9 \end{array}$$

Het snijpunt is (2, 9).

8 a Er geldt $x + y = 5000$.

b x kg van 12 euro per kg kost $12x$ euro.

y kg van 16 euro per kg kost $16y$ euro.

5000 kg van 12,80 euro per kg kost $5000 \cdot 12,80 = 64\,000$ euro.

Dus $12x + 16y = 64\,000$.

c $\begin{cases} x + y = 5000 \\ 12x + 16y = 64\,000 \end{cases} \begin{array}{l} |12 \\ |1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 12x + 12y = 60\,000 \\ 12x + 16y = 64\,000 \end{cases} -$

$$\begin{array}{l} -4y = -4000, \text{ dus } y = 1000 \\ x + y = 5000 \\ x + 1000 = 5000 \\ x = 4000 \end{array}$$

De oplossing is $x = 4000$ en $y = 1000$.

d Het mengsel bevat 4000 kg koffie uit Colombia en 1000 kg koffie uit Jamaica.

9 a x liter A van 18% alcohol geeft $0,18x$ liter alcohol.

y liter B van 10% alcohol geeft $0,10y$ liter alcohol.

20 liter van 15% geeft $20 \cdot 0,15 = 3$ liter alcohol.

Dus $0,18x + 0,10y = 3$.

b Er geldt ook dat $x + y = 20$.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 0,18x + 0,10y = 3 \\ x + y = 20 \end{cases} \begin{array}{l} |10 \\ |1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 1,8x + y = 30 \\ x + y = 20 \end{cases} - \\ \hline 0,8x = 10, \text{ dus } x = 12,5 \\ x + y = 20 \\ 12,5 + y = 20 \\ y = 7,5 \end{array}$$

Er is 12,5 liter A nodig en 7,5 liter B.

- 10 a** Samen 1 liter, dus $x + y = 1$.
 Uit de prijzen volgt $0,70x + y = 0,75$.

$$\begin{array}{r} b \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 0,70x + y = 0,75 \end{array} \right. \\ \underline{0,30x = 0,25} \quad \text{dus } x = \frac{5}{6} \\ \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x = \frac{5}{6} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{5}{6} + y = 1 \\ y = \frac{1}{6} \end{array} \end{array}$$

De samenstelling is $\frac{5}{6}$ liter appelsap en $\frac{1}{6}$ liter perziksap.

11 a $\left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right|$ geeft $\left\{ \begin{array}{l} 6x - 2y = 20 \\ -6x + 2y = 5 \end{array} \right. +$
 $0 = 25$

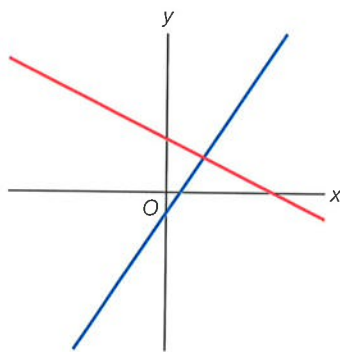
Er zijn geen waarden voor x en y .

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = -20 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 6x - 2y = 20 \\ -6x + 2y = -20 \end{array} \right. +$$

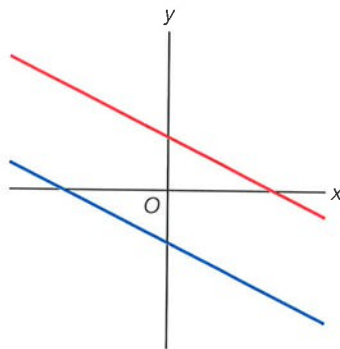
 $0 = 0$

Je hebt hier eigenlijk maar één vergelijking, want $-6x + 2y = -20$ delen door -2 geeft $3x - y = 10$.

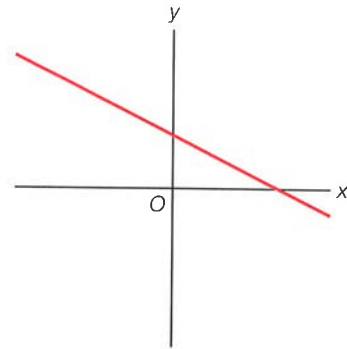
- b** Er zijn drie situaties te onderscheiden:
- 1 het stelsel heeft één oplossing, want de grafieken van de vergelijkingen snijden elkaar
 - 2 het stelsel heeft geen oplossing, want de grafieken van de vergelijkingen zijn evenwijdig
 - 3 het stelsel heeft oneindig veel oplossingen, want de grafieken van de vergelijkingen vallen samen.



situatie 1



situatie 2



situatie 3

Bladzijde 137

12 a $\left\{ \begin{array}{l} x - y + 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right|$ geeft $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 3y + 9z = 12 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{array} \right. -$
 $-2y + 4z = -2$

b $\left\{ \begin{array}{l} -3y + 5z = -6 \\ -2y + 4z = -2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 4 \\ 5 \end{array} \right|$ geeft $\left\{ \begin{array}{l} -12y + 20z = -24 \\ -10y + 20z = -10 \end{array} \right. -$
 $-2y = -14$, dus $y = 7$
 $-2y + 4z = -2$
 $-14 + 4z = -2$
 $4z = 12$
 $z = 3$

De oplossing is $y = 7$ en $z = 3$.

- c** Invullen van $y = 7$ en $z = 3$ in $x - y + 3z = 4$ geeft $x + 2 = 4$
 $x = 2$

Dus $x = 2$ en $y = 7$ en $z = 3$.

d Stelsel I:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$5y = 0, \text{ dus } y = 0$$

Dan $y = 0$ invullen in de eerste en derde vergelijking.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 4x - 3z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} |3| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3z = 6 \\ 4x - 3z = 1 \end{cases}$$

$$7x = 7, \text{ dus } x = 1$$

$$\begin{cases} 1 + z = 2 \\ x + z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} z = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

De oplossing is $x = 1$ en $y = 0$ en $z = 1$.

Stelsel II:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$2y + 2z = 2, \text{ dus } y + z = 1$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$y + 4z = -2$$

$$\begin{cases} y + 4z = -2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$3z = -3, \text{ dus } z = -1$$

$$\begin{cases} y + -1 = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} y = 2 \\ y = 2 \end{array}$$

Uit $x + y + 3z = 2$ volgt $x = 2 - y - 3z = 2 - 2 - 3 \cdot -1 = 3$.De oplossing is $x = 3$ en $y = 2$ en $z = -1$.

13 a $\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 90x + 100y + 50z = 1150 \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$

b $\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 20x + 30y + 4z = 200 \\ 15x + 30y + 9z = 225 \end{cases}$

$$5x - 5z = -25, \text{ dus } x - z = -5$$

$$\begin{cases} 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$$

$$-4x - 2z = -40, \text{ dus } 2x + z = 20$$

$$\begin{cases} x - z = -5 \\ 2x + z = 20 \end{cases}$$

$$3x = 15, \text{ dus } x = 5$$

$$\begin{cases} 5 - z = -5 \\ x - z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} z = 10 \\ z = 10 \end{array}$$

Invullen van $x = 5$ en $z = 10$ in $5x + 10y + 3z = 75$ geeft $55 + 10y = 75$

$$10y = 20$$

$$y = 2$$

De oplossing is $x = 5$ en $y = 2$ en $z = 10$.

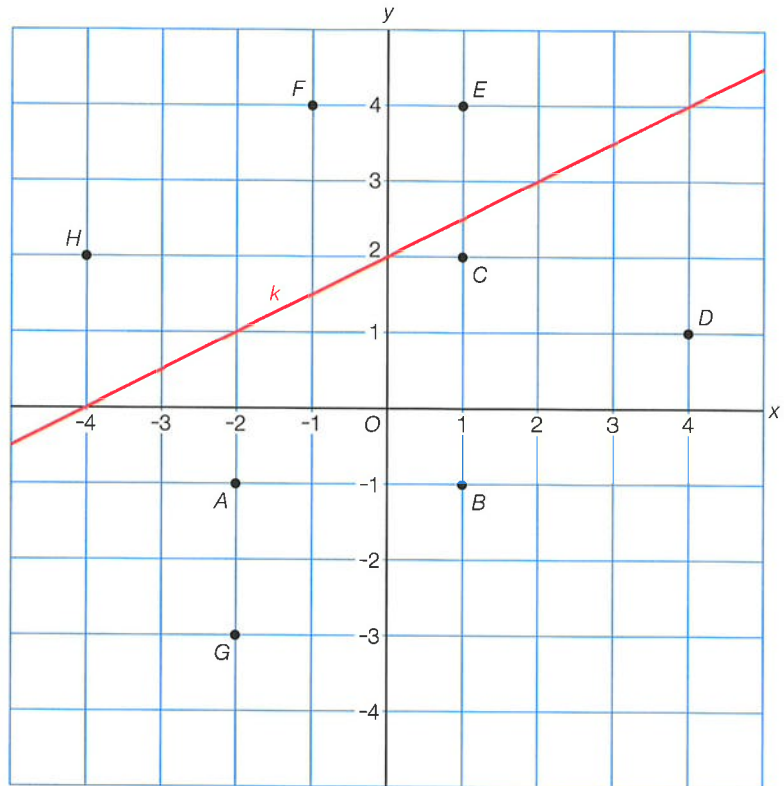
Het dieet bestaat dus uit 500 gram I, 200 gram II en 1000 gram III.

K.2 Ongelijkheden met twee variabelen

Bladzijde 139

14 a $k: x - 2y = -4$

x	0	-4
y	2	0



b Invullen geeft $-2 + 2 > -4$ en dat klopt.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Punt boven k ?	nee	nee	nee	nee	ja	ja	nee	ja
Voldoet aan $x - 2y > -4$?	ja	ja	ja	ja	nee	nee	ja	nee

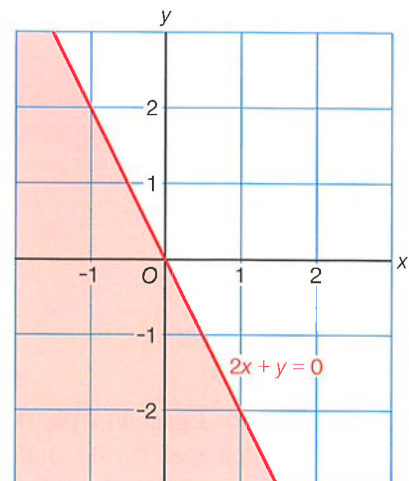
d De punten die voldoen aan $x - 2y > -4$ liggen onder de lijn k .

Bladzijde 140

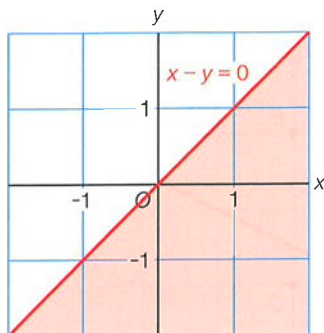
15 a Omdat dit punt op de lijn $2x + y = 0$ ligt.

b Bijvoorbeeld $(1, -2)$, want dit punt ligt ook op de lijn $2x + y = 0$.

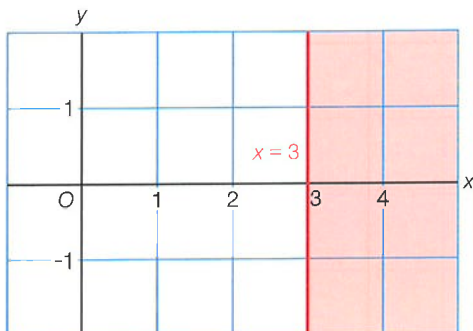
c $(0, 1)$ invullen geeft $1 \leq 0$; dit klopt niet.



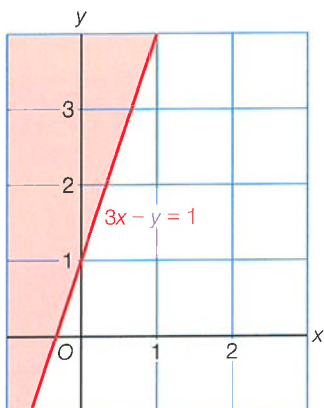
- 16 a** De lijn $x - y = 0$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, 1)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $1 - 0 \geq 0$; dit klopt.



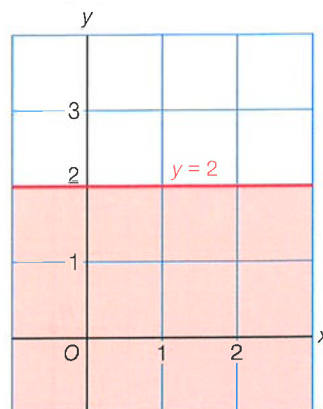
- b** De lijn $x = 3$ is een verticale lijn.



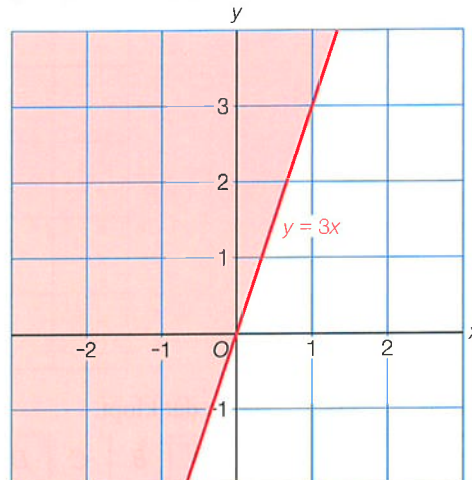
- c** De lijn $3x - y = -1$ gaat door $(0, 1)$ en $(1, 4)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 \leq -1$; dit klopt niet.



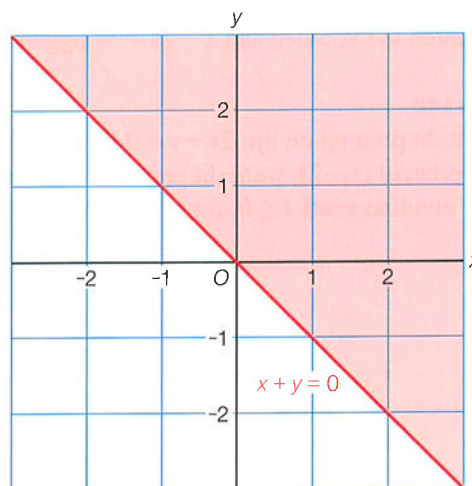
- d** De lijn $y = 2$ is een horizontale lijn.



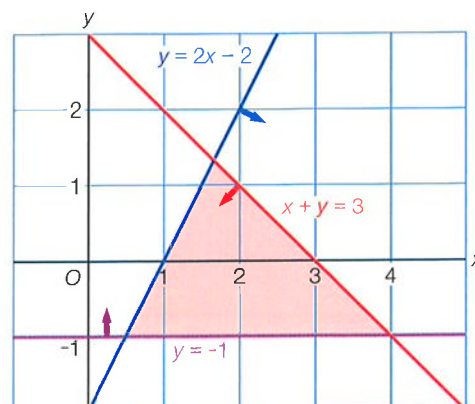
- e** De lijn $y = 3x$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, 3)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $0 \geq 1$; dit klopt niet.



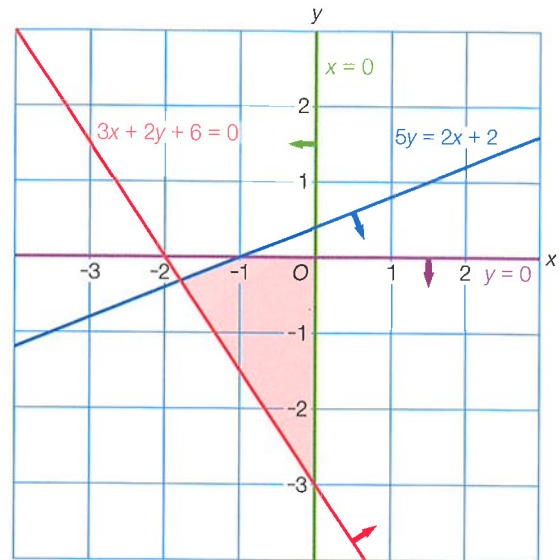
- f** De lijn $x + y = 0$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, -1)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $0 + 1 \geq 0$; dit klopt.



- 17 a** De lijn $x + y = 3$ gaat door $(0, 3)$ en $(3, 0)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq 3$; dit klopt.
De lijn $y = 2x - 2$ gaat door $(1, 0)$ en $(0, -2)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 \leq 0 - 2$; dit klopt niet.
De lijn $y = -1$ is een horizontale lijn.



- b** De lijn $3x + 2y + 6 = 0$ gaat door $(-2, 0)$ en $(0, -3)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 + 6 \geq 0$; dit klopt.
 De lijn $5y = 2x + 2$ gaat door $(-1, 0)$ en $(4, 2)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 \leq 0 + 2$; dit klopt.
 De lijn $x = 0$ is de y -as.
 De lijn $y = 0$ is de x -as.

**Bladzijde 141**

- 18 a** Het gebied heeft vier grenslijnen:

- 1 De y -as: $x = 0$.
- 2 De lijn door $(0, 5)$ en $(2, 0)$: $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.
- 3 De lijn door $(0, 3)$ en $(4, 0)$: $y = -\frac{3}{4}x + 3$.
- 4 De x -as: $y = 0$.

Voor het gebied geldt: $x \geq 0$ en $y \geq -2\frac{1}{2}x + 5$ en $y \geq -\frac{3}{4}x + 3$ en $y \geq 0$.

- b** Los op $-2\frac{1}{2}x + 5 = -\frac{3}{4}x + 3$

$$-1\frac{3}{4}x = -2$$

$$x = 1\frac{1}{7}$$

Samen met $y = -\frac{3}{4}x + 3$ geeft dit $y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} + 3 = 2\frac{1}{7}$.

De coördinaten van A zijn $(1\frac{1}{7}, 2\frac{1}{7})$.

- 19 a** De grenslijn door $(0, 6)$ en $(3, 0)$: $y = -2x + 6$.

De grenslijn door $(0, 6)$ en $(6, 0)$: $y = -x + 6$.

De grenslijn door $(0, 0)$ en $(2, 1)$: $y = \frac{1}{2}x$.

Voor het gebied geldt: $y \geq -2x + 6$ en $y \leq -x + 6$ en $y \geq \frac{1}{2}x$.

- b** Los op $-2x + 6 = \frac{1}{2}x$

$$-2\frac{1}{2}x = -6$$

$$x = 2\frac{2}{5}$$

Samen met $y = \frac{1}{2}x$ geeft dit $y = 1\frac{1}{5}$.

Het punt met de kleinste y -coördinaat is hoekpunt $(2\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})$.

- c** Het punt met de grootste x -coördinaat is hoekpunt $(4, 2)$.

- d** De coördinaten van de roosterpunten in V zijn $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(1, 5)$ en $(0, 6)$.

- 20 a** Voor x huizen van het type A is $250x \text{ m}^2$ nodig en voor y huizen van het type B is $200y \text{ m}^2$ nodig.

Het totaal moet kleiner dan of gelijk aan de beschikbare 4000 m^2 zijn.

Dus $250x + 200y \leq 4000$. Delen door 50 geeft $5x + 4y \leq 80$.

- b** Het totaal aantal mensdagen is $240x + 320y$.

Hiervoor geldt $240x + 320y \leq 4800$. Delen door 80 geeft $3x + 4y \leq 60$.

- c** Hierbij horen de ongelijkheden $x \geq 4$ en $y \geq 5$.

- d** De lijn $5x + 4y = 80$ gaat door $(0, 20)$ en $(16, 0)$.

De lijn $3x + 4y = 60$ gaat door $(0, 15)$ en $(20, 0)$.

De lijn $x = 4$ is een verticale lijn en de lijn $y = 5$ is een horizontale lijn.

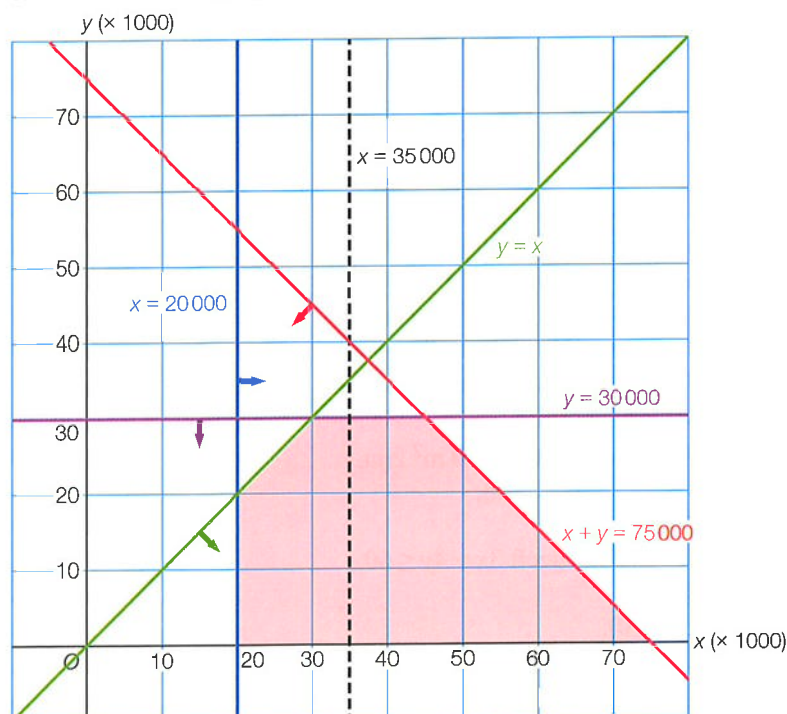
Door het uitproberen van bijvoorbeeld $(0, 0)$ in beide formules komen we voor de gecombineerde ongelijkheden tot het volgende gebied.



- e** Alleen gehele waarden van x en y zijn mogelijk. Bij de roosterpunten horen gehele waarden van x en y , dus alleen de roosterpunten zijn van belang.
Zie de punten in de figuur.
- f** Kies van de roosterpunten van vraag e het punt waarvoor $x + y$ maximaal is en y zo groot mogelijk is. Dit levert het punt $(8, 9)$.
Er worden acht huizen van type A en negen van type B gebouwd.
Er wordt $8 \cdot 250 + 9 \cdot 200 = 3800 \text{ m}^2$ gebruikt.

Bladzijde 142

- 21 a** Stel dat hij x euro in aandelen belegt en y euro in obligaties.
Je krijgt $x \geq 20\,000$ en $y \leq 30\,000$ en $x \geq y$ en $x + y \leq 75\,000$.
- b** De lijn $x = y$ gaat door $(0, 0)$ en $(70\,000, 70\,000)$.
De lijn $x + y = 75\,000$ gaat door $(0, 75\,000)$ en $(75\,000, 0)$.
Door het uitproberen van bijvoorbeeld $(0, 0)$ in beide formules komen we voor de gecombineerde ongelijkheden tot het volgende gebied.



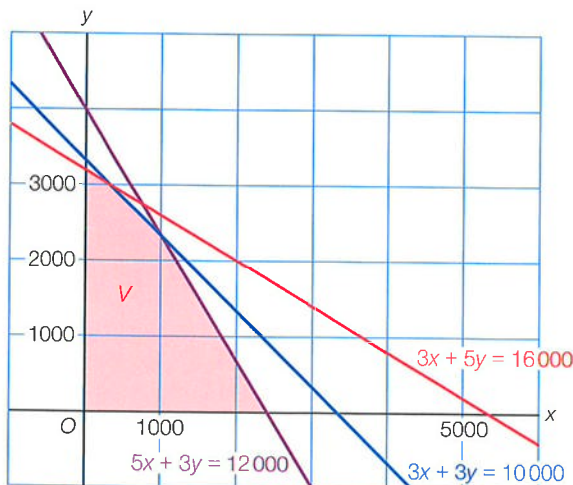
- c** De lijn $x = 35\,000$ snijdt de rand van het gebied bij de lijn $y = 30\,000$, dus hij kan nog $30\,000$ euro in obligaties beleggen.

K.3 Lineaire programmeringsproblemen**Bladzijde 144**

- 22 a** Voor 1700 liter M is $0,2 \cdot 1700 = 340$ liter melk nodig en $0,15 \cdot 1700 = 255$ liter room.
 Voor 1400 liter R is $0,2 \cdot 1400 = 280$ liter melk nodig en $0,3 \cdot 1400 = 420$ liter room.
 Totaal is dus $340 + 280 = 620$ liter melk nodig en $255 + 420 = 675$ liter room.
 Er is te weinig room beschikbaar.
- b** Er wordt meer R dan M gemaakt.
- c** Meer M dan R, dat klopt.
 Nodig aan melk: $0,2 \cdot 2000 + 0,2 \cdot 1000 = 600$ liter, dat kan.
 Nodig aan room: $0,15 \cdot 2000 + 0,3 \cdot 1000 = 600$ liter, dat kan.
 Dus het is mogelijk.

Bladzijde 145

- 23 a** Voor punt A geldt $\begin{cases} y = x \\ x + y = 2000 \end{cases}$ en dit geeft $(1000, 1000)$.
 Punt B is het punt $(2000, 0)$.
 Punt C is het punt $(3100, 0)$.
 Voor punt D geldt
- $$\begin{cases} 0,2x + 0,2y = 620 & | \cdot 15 \\ 0,15x + 0,3y = 600 & | \cdot 10 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3y = 9300 \\ 1,5x + 3y = 6000 \end{cases}$$
- $$\begin{array}{r} 3x + 3y = 9300 \\ -1,5x - 3y = -6000 \\ \hline 1,5x = 3300, \text{ dus } x = 2200 \end{array}$$
- $x + y = 3100 \Rightarrow y = 900$
- Dus $D(2200, 900)$.
- Voor punt E geldt $\begin{cases} y = x \\ 0,15x + 0,3y = 600 \end{cases}$ en dit geeft $(1333\frac{1}{3}, 1333\frac{1}{3})$.
- b** Je zit dan in het punt A, dus 1000 liter M en 1000 liter R.
- c** Je zit dan in het punt E, dus $1333\frac{1}{3}$ liter M en $1333\frac{1}{3}$ liter R.
- d** In het snijpunt van de lijn $x = 1500$ met de lijn $x + y = 2000$ geldt $1500 + y = 2000$, dus $y = 500$.
 In het snijpunt van de lijn $x = 1500$ met de lijn $0,15x + 0,3y = 600$ geldt $0,15 \cdot 1500 + 0,3y = 600$ en dit geeft $y = 1250$.
 Dus nog 500 liter tot en met 1250 liter R mogelijk.
- 24 a** Bij de factor arbeid hoort $9x + 15y \leq 48000$, oftewel $3x + 5y \leq 16000$.
b Bij de factor machinetijd hoort $3x + 3y \leq 10000$.
 Bij de factor materiaal hoort $50x + 30y \leq 120000$, oftewel $5x + 3y \leq 12000$.
c De lijn $3x + 5y = 16000$ gaat door $(0, 3200)$ en $(5333\frac{1}{3}, 0)$.
 De lijn $3x + 3y = 10000$ gaat door $(0, 3333\frac{1}{3})$ en $(3333\frac{1}{3}, 0)$.
 De lijn $5x + 3y = 12000$ gaat door $(0, 4000)$ en $(2400, 0)$.



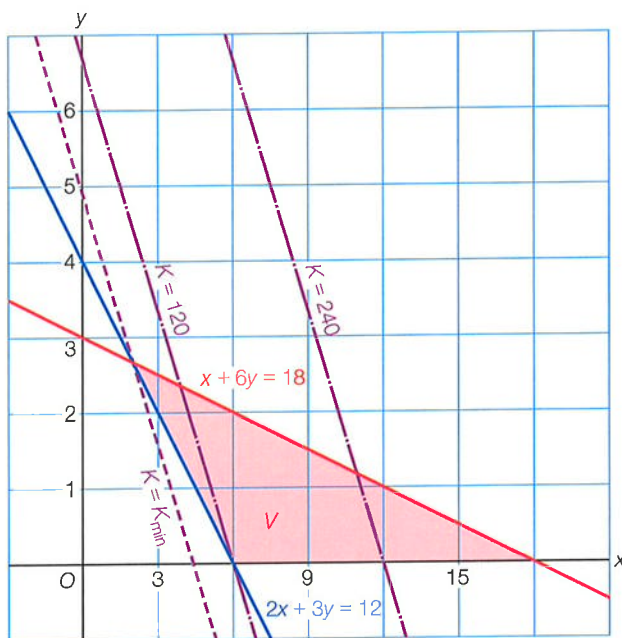
- d De lijn $x = 3000$ snijdt V niet, dus 3000 paar Air Extra lukt niet.
 e De lijn $y = 2000$ snijdt de rand van V bij de lijn $5x + 3y = 12\,000$, dus $5x + 3 \cdot 2000 = 12\,000$ en dit geeft $x = 1200$.
 Dus maximaal 1200 paar Air Extra mogelijk.

Bladzijde 146

- 25 a De winst is $0,45 \cdot 1500 + 0,75 \cdot 1000 = 1425$ euro.
 b Zo veel mogelijk M, dus in $C(3100, 0)$.
 De winst is $0,45 \cdot 3100 = 1395$ euro.
 Zo veel mogelijk R, dus in $E(1333\frac{1}{3}, 1333\frac{1}{3})$.
 Dus de winst is $0,45 \cdot 1333\frac{1}{3} + 0,75 \cdot 1333\frac{1}{3} = 1600$ euro.
 c In het punt $D(2200, 900)$ is de winst $0,45 \cdot 2200 + 0,75 \cdot 900 = 1665$ euro.

Bladzijde 148

- 26 De grenslijnen zijn $y = 0$,
 $x + 6y = 18$ door $(0, 3)$ en $(18, 0)$,
 $2x + 3y = 12$ door $(6, 0)$ en $(0, 4)$.



Isolijn door $(6, 0)$ geeft $20x + 18y = 120$ en gaat ook door $(0, 6\frac{2}{3})$.

Isolijn door $(12, 0)$ geeft $K = 240$.

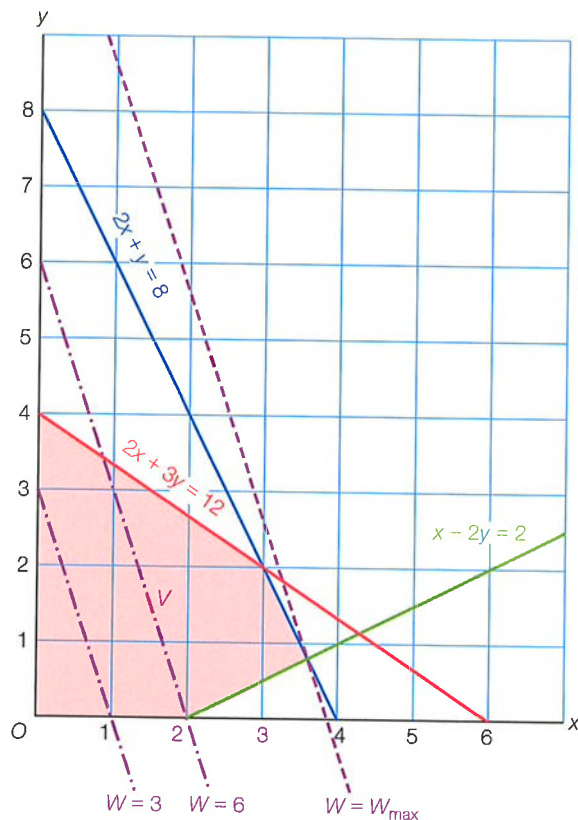
K is minimaal in het snijpunt van de lijnen $x + 6y = 18$ en $2x + 3y = 12$.

$$\begin{cases} x + 6y = 18 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \begin{array}{l} |1 \\ |2 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x + 6y = 18 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} -3x & = & -6, \text{ dus } x = 2 \\ x + 6y & = & 18 \end{array} \begin{cases} 2 + 6y = 18 \\ 6y = 16 \\ y = 2\frac{2}{3} \end{cases}$$

$K_{\min}$ in $(2, 2\frac{2}{3})$, dus $K_{\min} = 20 \cdot 2 + 18 \cdot 2\frac{2}{3} = 88$.

- 27 De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $2x + 3y = 12$ door $(6, 0)$ en $(0, 4)$,
 $2x + y = 8$ door $(4, 0)$ en $(0, 8)$,
 $x - 2y = 2$ door $(2, 0)$ en $(0, -1)$.



Isolijn door $(1, 0)$ geeft $3x + y = 3$ en gaat ook door $(0, 3)$.

Isolijn door $(2, 0)$ geeft $W = 6$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $2x + y = 8$ en $x - 2y = 2$.

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \begin{array}{l} | 2 \\ | 1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 2y = 2 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 5x \\ = 18, \text{ dus } x = 3,6 \end{array} \left. \begin{array}{l} 7,2 + y = 8 \\ y = 0,8 \end{array} \right\}$$

$W_{\max}$ in $(3,6; 0,8)$, dus $W_{\max} = 3 \cdot 3,6 + 0,8 = 11,6$.

Bladzijde 151

28 a	fauteuil	sofa	beschikbaar per dag
constructieafdeling	6 uur	3 uur	96 uur
bekledingsafdeling	2 uur	6 uur	72 uur
afwerkingsafdeling	1 uur	1 uur	18 uur
winst per stuk in euro's	640	560	

b $W = 640x + 560y$

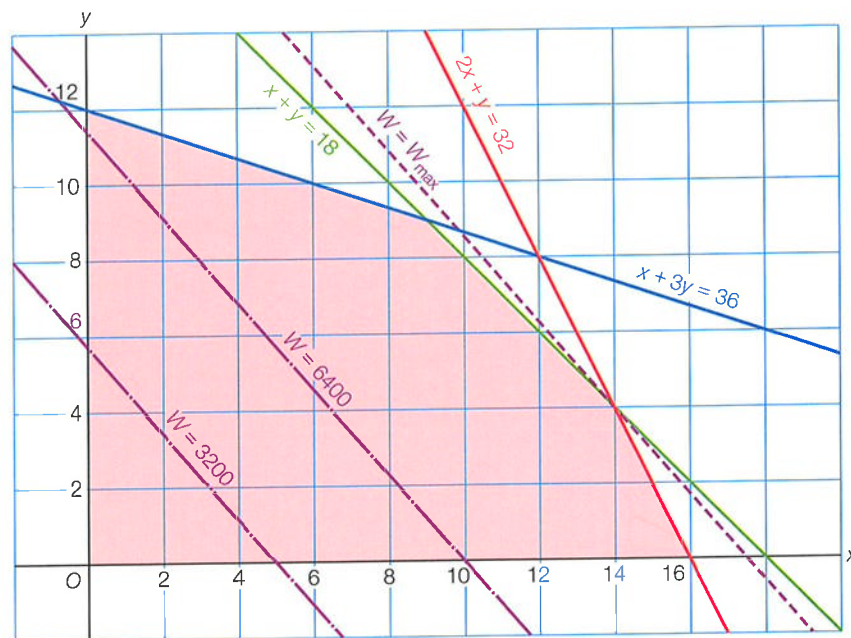
c $x \geq 0$ en $y \geq 0$

$6x + 3y \leq 96$, oftewel $2x + y \leq 32$ (constructieafdeling)

$2x + 6y \leq 72$, oftewel $x + 3y \leq 36$ (bekledingsafdeling)

$x + y \leq 18$ (afwerkingsafdeling)

- d Grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $2x + y = 32$ door $(0, 32)$ en $(16, 0)$,
 $x + 3y = 36$ door $(0, 12)$ en $(36, 0)$,
 $x + y = 18$ door $(0, 18)$ en $(18, 0)$.



- e Isolijn door $(5, 0)$ geeft $640x + 560y = 3200$ en gaat ook door $(0, 5,7)$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 6400$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $2x + y = 32$ en $x + y = 18$.

$$\begin{cases} 2x + y = 32 \\ x + y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 14 \\ x + y = 18 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = 14 \\ x + y = 18 \end{array}} \right\} & 14 + y = 18 \\ & & y = 4 \end{array}$$

$W_{\max}$ in $(14, 4)$, dus $W_{\max} = 640 \cdot 14 + 560 \cdot 4 = 11\,200$ euro.

- f $W_{\max}$ in het snijpunt van de lijnen die bij de constructieafdeling en de afwerkingsafdeling horen.

Dus op de bekledingsafdeling worden niet alle beschikbare uren gebruikt.

Er worden daar $2 \cdot 14 + 6 \cdot 4 = 52$ uren gebruikt, dus er blijven $72 - 52 = 20$ uren over.

- 29 a Isolijn door $(5, 0)$ geeft $640x + 800y = 3200$ en gaat ook door $(0, 4)$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 6400$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $x + 3y = 36$ en $x + y = 18$.

$$\begin{cases} x + 3y = 36 \\ x + y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 2y = 18, \text{ dus } y = 9 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2y = 18 \\ x + y = 18 \end{array}} \right\} & x + 9 = 18 \\ x + y = 18 & & x = 9 \end{array}$$

$W_{\max}$ in $(9, 9)$, dus $W_{\max} = 640 \cdot 9 + 800 \cdot 9 = 12\,960$ euro.

$W_{\max}$ in het snijpunt van de lijnen die bij de bekledingsafdeling en de afwerkingsafdeling horen.

Op de constructieafdeling worden $6 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 81$ uren gebruikt, dus er blijven $96 - 81 = 15$ uren over.

- b Isolijn door $(5, 0)$ geeft $200x + 800y = 1000$ en gaat ook door $(0, 1\frac{1}{4})$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 2000$.
 W is maximaal in het punt $(0, 12)$.
 Dus maximale winst bij programma $(0, 12)$.

Bladzijde 152

30 a

	seniorenwoning	villa	
kapitaal	60 000 euro	160 000 euro	14 400 000 euro
mensdagen	150 dagen	200 dagen	24 000 dagen
winst per woning	10 000 euro	14 000 euro	

$$W = 10\,000x + 14\,000y$$

b $x \geq 0$ en $y \geq 0$

$$60\,000x + 160\,000y \leq 14\,400\,000, \text{ oftewel } 3x + 8y \leq 720 \text{ (kapitaal)}$$

$$150x + 200y \leq 24\,000, \text{ oftewel } 3x + 4y \leq 480 \text{ (mensdagen)}$$

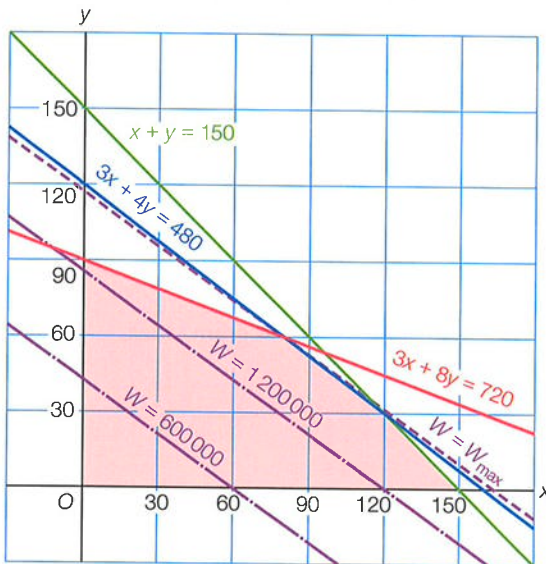
$$x + y \leq 150 \text{ (aantal huizen)}$$

De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,

$$3x + 8y = 720 \text{ door } (0, 90) \text{ en } (240, 0),$$

$$3x + 4y = 480 \text{ door } (0, 120) \text{ en } (160, 0),$$

$$x + y = 150 \text{ door } (0, 150) \text{ en } (150, 0).$$

c Isolijn door $(60, 0)$ geeft $10\,000x + 14\,000y = 600\,000$ en gaat ook door $(0; 42,9)$.Isolijn door $(120, 0)$ geeft $W = 1\,200\,000$. W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $3x + 8y = 720$ en $3x + 4y = 480$.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 720 \\ 3x + 4y = 480 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4y &= 240, \text{ dus } y = 60 \\ 3x + 8y &= 720 \end{aligned} \quad \begin{cases} 3x + 480 = 720 \\ 3x = 240 \\ x = 80 \end{cases}$$

$$W_{\max} \text{ in } (80, 60), \text{ dus } W_{\max} = 10\,000 \cdot 80 + 14\,000 \cdot 60 = 1\,640\,000 \text{ euro.}$$

31

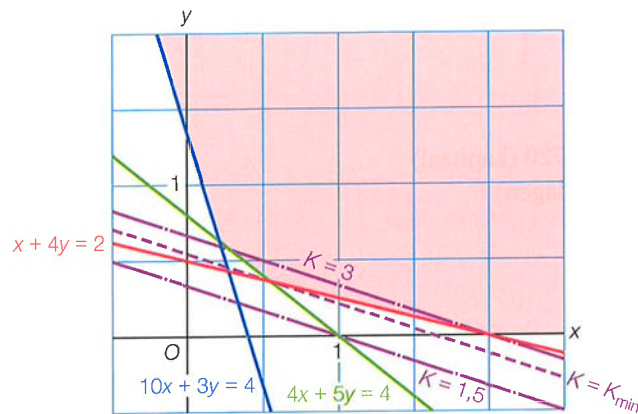
a x = aantal kg groenten in een blik y = aantal kg vlees in een blikDe doelfunctie is $K = 1,5x + 4,5y$.De beperkende voorwaarden zijn $x \geq 0$ en $y \geq 0$,

$$50x + 200y \geq 100, \text{ oftewel } x + 4y \geq 2 \text{ (vet),}$$

$$250x + 75y \geq 100, \text{ oftewel } 10x + 3y \geq 4 \text{ (eiwit),}$$

$$200x + 250y \geq 200, \text{ oftewel } 4x + 5y \geq 4 \text{ (koolhydraten).}$$

- b De grenslijnen zijn $x = 0$ en $y = 0$,
 $x + 4y = 2$ door $(0, \frac{1}{2})$ en $(2, 0)$,
 $10x + 3y = 4$ door $(0, 1\frac{1}{3})$ en $(\frac{2}{5}, 0)$,
 $4x + 5y = 4$ door $(0, \frac{4}{5})$ en $(1, 0)$.



Isolijn door $(1, 0)$ geeft $1,50x + 4,50y = 1,50$ en gaat ook door $(0, \frac{1}{3})$.

Isolijn door $(2, 0)$ geeft $K = 3$.

K is minimaal in het snijpunt van de lijnen $x + 4y = 2$ en $4x + 5y = 4$.

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 16y = 8 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$$

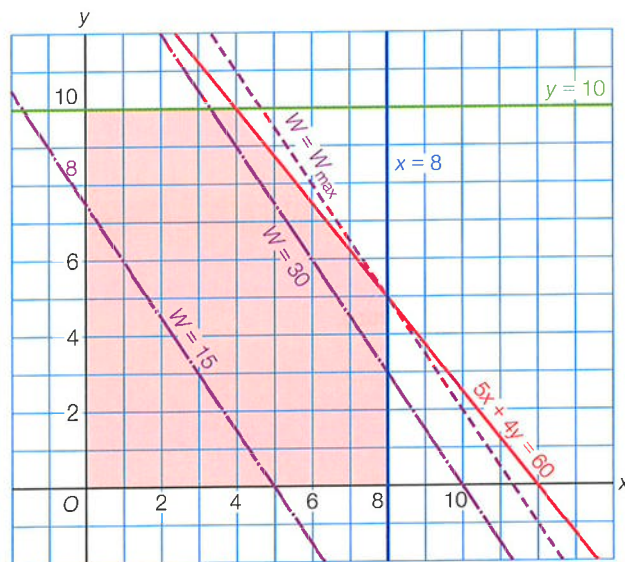
$$11y = 4, \text{ dus } y = \frac{4}{11} \quad \left. \begin{matrix} x + 4y = 2 \\ x + \frac{16}{11} = 2 \end{matrix} \right\} x = \frac{6}{11}$$

Dus de samenstelling van een blik is $\frac{6}{11}$ kg ≈ 545 gram groenten en $\frac{4}{11}$ kg ≈ 364 gram vlees.

K.4 De hoekpuntmethode

Bladzijde 154

- 32 a Grenslijnen $x = 0$, $y = 0$,
 $5x + 4y = 60$ door $(0, 15)$ en $(12, 0)$, $x = 8$ en $y = 10$.



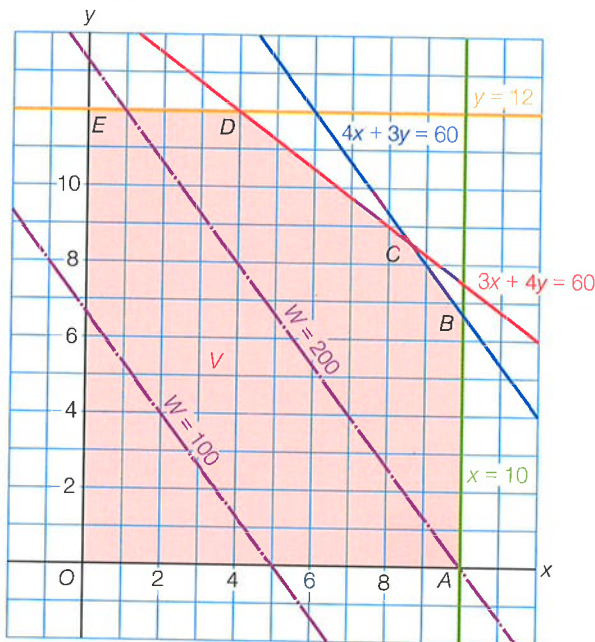
- b Isolijn door $(5, 0)$ geeft $3x + 2y = 15$ en gaat ook door $(0, 7\frac{1}{2})$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 30$.
 W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $5x + 4y = 60$ en $x = 8$, dus in het punt $(8, 5)$.
- c De isolijnen van $R = 10x + 8y$ zijn evenwijdig met de lijn $5x + 4y = 60$, dus met een rand van het toegestane gebied. Elk punt op de rand maximaliseert de doelfunctie.

33 De volgende doelfuncties leveren meer dan één oplossing op:

- $W = 3x + 12y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $x + 4y = 30$, omdat $3 : 12 = 1 : 4$
- $W = 1,5x + y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $3x + 2y = 20$, omdat $1,5 : 1 = 3 : 2$
- $W = 0,5x + 2y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $x + 4y = 30$, omdat $0,5 : 2 = 1 : 4$

Bladzijde 155

34 De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $3x + 4y = 60$ door $(0, 15)$ en $(20, 0)$,
 $4x + 3y = 60$ door $(0, 20)$ en $(15, 0)$,
 $x = 10$ en $y = 12$.



Isolijn door $(5, 0)$ geeft $20x + 15y = 100$ en gaat ook door $(0, 6\frac{2}{3})$.

Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 200$.

De isolijnen zijn evenwijdig met de rand BC op de lijn $4x + 3y = 60$, want $20 : 15 = 4 : 3$.

Het punt B is het snijpunt van de lijnen $4x + 3y = 60$ en $x = 10$, dus $4 \cdot 10 + 3y = 60$, oftewel $3y = 20$ en $y = 6\frac{2}{3}$. Dus $B(10, 6\frac{2}{3})$.

Het punt C is het snijpunt van de lijnen $3x + 4y = 60$ en $4x + 3y = 60$.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 60 & | \cdot 3 \\ 4x + 3y = 60 & | \cdot 4 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 12y = 180 \\ 16x + 12y = 240 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -7x \qquad \qquad = -60, \text{ dus } x = 8\frac{4}{7} \\ \qquad \qquad \qquad 3x + 4y = 60 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 25\frac{5}{7} + 4y = 60 \\ 4y = 34\frac{2}{7} \\ y = 8\frac{4}{7} \end{array} \right.$$

Dus $C(8\frac{4}{7}, 8\frac{4}{7})$.

Elk punt op het lijnstuk BC met $B(10, 6\frac{2}{3})$ en $C(8\frac{4}{7}, 8\frac{4}{7})$ maximaliseert de doelfunctie $W = 20x + 15y$.

$$W_{\max} = 20 \cdot 10 + 15 \cdot 6\frac{2}{3} = 300 \text{ of } W_{\max} = 20 \cdot 8\frac{4}{7} + 15 \cdot 8\frac{4}{7} = 300.$$

35 a Isolijnen van de doelfunctie $K = 8x + ay$ evenwijdig met de lijn $6x + 5y = 30$ geeft

$$8 : a = 6 : 5, \text{ oftewel } \frac{8}{a} = \frac{6}{5}, \text{ dus } a = \frac{8 \cdot 5}{6} = 6\frac{2}{3}.$$

Dit geeft $K = 8x + 6\frac{2}{3}y$.

$$K = 8x + 6\frac{2}{3}y \text{ door } (0, 6) \text{ geeft } K_{\min} = 8 \cdot 0 + 6\frac{2}{3} \cdot 6 = 40.$$

Isolijnen van de doelfunctie $K = 8x + ay$ evenwijdig met de lijn $2x + 3y = 12$ geeft

$$8 : a = 2 : 3, \text{ oftewel } \frac{8}{a} = \frac{2}{3}, \text{ dus } a = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12.$$

Dit geeft $K = 8x + 12y$.

$$K = 8x + 12y \text{ door } (6, 0) \text{ geeft } K_{\min} = 8 \cdot 6 + 12 \cdot 0 = 48.$$

- b Er geldt $p : 3 = 6 : 5$, oftewel $\frac{p}{3} = \frac{6}{5}$ en dit geeft $p = \frac{6 \cdot 3}{5} = 3,6$.
- c Hoe groter de waarde van p , hoe steiler de isolijnen naar beneden lopen.
Het punt $(0, 6)$ minimaliseert de doelfunctie als de isolijnen steiler naar beneden lopen dan AB , dus $p > 3,6$.
- d De isolijnen van de doelfunctie lopen evenwijdig aan het lijnstuk BC als $p : 3 = 2 : 3$, dus $p = 2$.
Het punt $(3\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})$ minimaliseert de doelfunctie als de isolijnen minder steil lopen dan AB en steiler dan BC , dus $2 < p < 3,6$.

Bladzijde 156

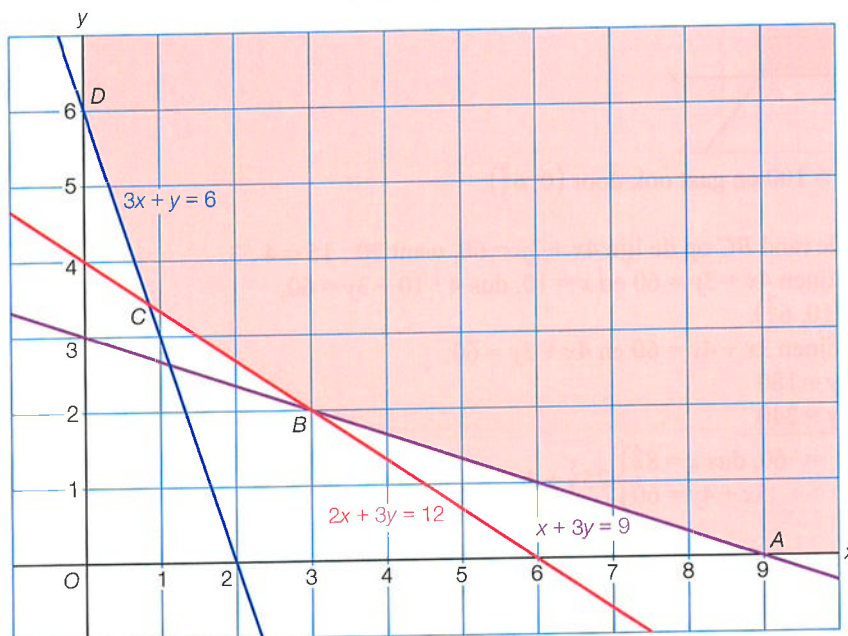
- 36 Ze krijgt bij twee hoekpunten dezelfde maximale waarde van de doelfunctie. Dat betekent dat de isolijn samenvalt met het lijnstuk tussen die twee hoekpunten en dat alle programma's op dat lijnstuk de doelfunctie maximaliseren.

Bladzijde 157

- 37 x = aantal keren 70 gram rijst
 y = aantal keren 70 gram sojabonen
 Doelfunctie: $P = 0,18x + 0,12y$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,
 $15x + 22,5y \geq 90$, oftewel $2x + 3y \geq 12$,
 $3390x + 1130y \geq 6780$, oftewel $3x + y \geq 6$,
 $0,1x + 0,3y \geq 0,9$, oftewel $x + 3y \geq 9$.

Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,
 $2x + 3y = 12$ door $(0, 4)$ en $(6, 0)$,
 $3x + y = 6$ door $(0, 6)$ en $(2, 0)$,
 $x + 3y = 9$ door $(0, 3)$ en $(9, 0)$.



$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ x = 3 \end{array} \quad \begin{cases} 3 + 3y = 9, \text{ dus } y = 2 \end{cases}$$

Dus $B(3, 2)$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{r} |1 \\ |3 \end{array} \quad \text{geeft} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x + 3y = 18 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -7x = -6 \end{array} \quad \begin{cases} x = \frac{6}{7} \\ 3x + y = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \frac{18}{7} + y = 6, \text{ dus } y = \frac{24}{7} \end{array}$$

Dus $C(\frac{6}{7}, \frac{24}{7})$.

hoekpunt	$P = 0,18x + 0,12y$	
$A(9, 0)$	1,62	
$B(3, 2)$	0,78	
$C(\frac{6}{7}, \frac{24}{7})$	$\approx 0,57$	← minimaal
$D(0, 6)$	0,72	

Dus het voedselpakket moet bestaan uit $\frac{6}{7} \cdot 70 = 60$ gram rijst en $\frac{24}{7} \cdot 70 = 240$ gram sojabonen.

38 a Doelfunctie: $W = 350x + 300y$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,

$10x + 7,5y \leq 2000$, oftewel $4x + 3y \leq 800$ (arbeid),

$0,2x + 0,5y \leq 90$, oftewel $2x + 5y \leq 900$ (polyetheen),

$1,1x + 1,2y \leq 264$, oftewel $11x + 12y \leq 2640$ (polyester),

$5x + 5y \leq 1500$, oftewel $x + y \leq 300$ (kleurstoffen).

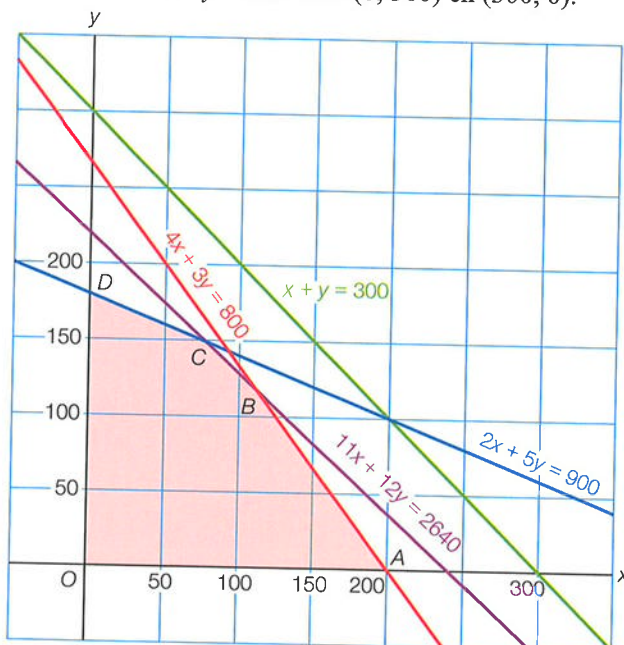
Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,

$4x + 3y = 800$ door $(0, 266\frac{2}{3})$ en $(200, 0)$,

$2x + 5y = 900$ door $(0, 180)$ en $(450, 0)$,

$11x + 12y = 2640$ door $(0, 220)$ en $(240, 0)$,

$x + y = 300$ door $(0, 300)$ en $(300, 0)$.



$$\begin{cases} 4x + 3y = 800 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 16x + 12y = 3200 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5x \\ 4x + 3y = 800 \end{array} \begin{array}{l} = 560, \text{ dus } x = 112 \\ 448 + 3y = 800, \text{ dus } y = 117\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $B(112, 117\frac{1}{3})$.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 900 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases} \begin{vmatrix} 12 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 24x + 60y = 10800 \\ 55x + 60y = 13200 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -31x \\ 2x + 5y = 900 \end{array} \begin{array}{l} = -2400, \text{ dus } x \approx 77,4 \\ 154,8 + 5y = 900, \text{ dus } y \approx 149,0 \end{array}$$

Dus $C(77,4; 149,0)$.

hoekpunt	$W = 350x + 300y$	
$A(200, 0)$	70 000	
$B(112, 117\frac{1}{3})$	74 400	← maximaal
$C(77,4; 149,0)$	71 790	
$D(0, 180)$	54 000	

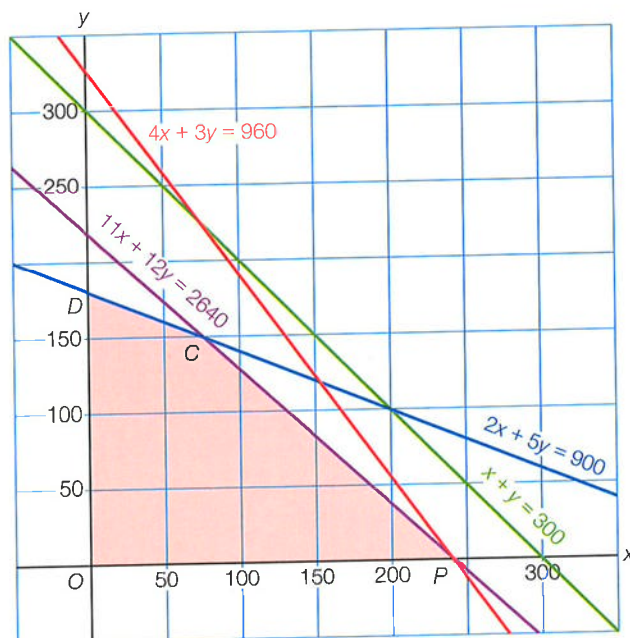
Dus $W_{\max} = 74 400$ euro.

Omdat B het snijpunt is van de lijnen die bij arbeid en polyester horen, blijft er polyetheen en kleurstoffen over.

Gebruik polyetheen: $0,2 \cdot 112 + 0,5 \cdot 117\frac{1}{3} \approx 81,07 \text{ m}^2$, dus er blijft $90 - 81,07 = 8,93 \text{ m}^2$ over.

Gebruik kleurstoffen: $5 \cdot 112 + 5 \cdot 117\frac{1}{3} \approx 1146\frac{2}{3}$ liter, dus er blijft $1500 - 1146\frac{2}{3} = 353\frac{1}{3}$ liter over.

- b** De beperkende voorwaarde van de arbeid wordt $10x + 7,5y \leq 2400$, oftewel $4x + 3y \leq 960$.
De bijbehoren grenslijn is $4x + 3y = 960$ door $(0, 320)$ en $(240, 0)$.



hoekpunt	$W = 350x + 300y$	
$P(240, 0)$	84 000	← maximaal
$C(77,4; 149,0)$	71 790	
$D(0, 180)$	54 000	

Nu is $W_{\max} = 84\,000$ euro.

Dat is $\frac{84\,000 - 74\,400}{74\,400} \times 100\% \approx 12,9\%$ meer.

Bladzijde 158

39 a x = aantal Amerikaanse vliegtuigen

y = aantal Engelse vliegtuigen

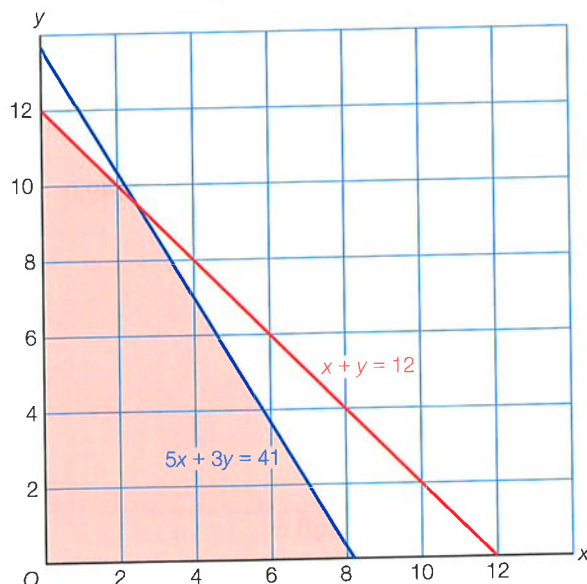
Doelfunctie: $V = 5400x + 3600y$.

Beperkende voorwaarden: $x + y \leq 12$ en $5x + 3y \leq 41$ en $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,

$x + y = 12$ door $(0, 12)$ en $(12, 0)$,

$5x + 3y = 41$ door $(8,2)$ en $(0, 13\frac{2}{3})$.

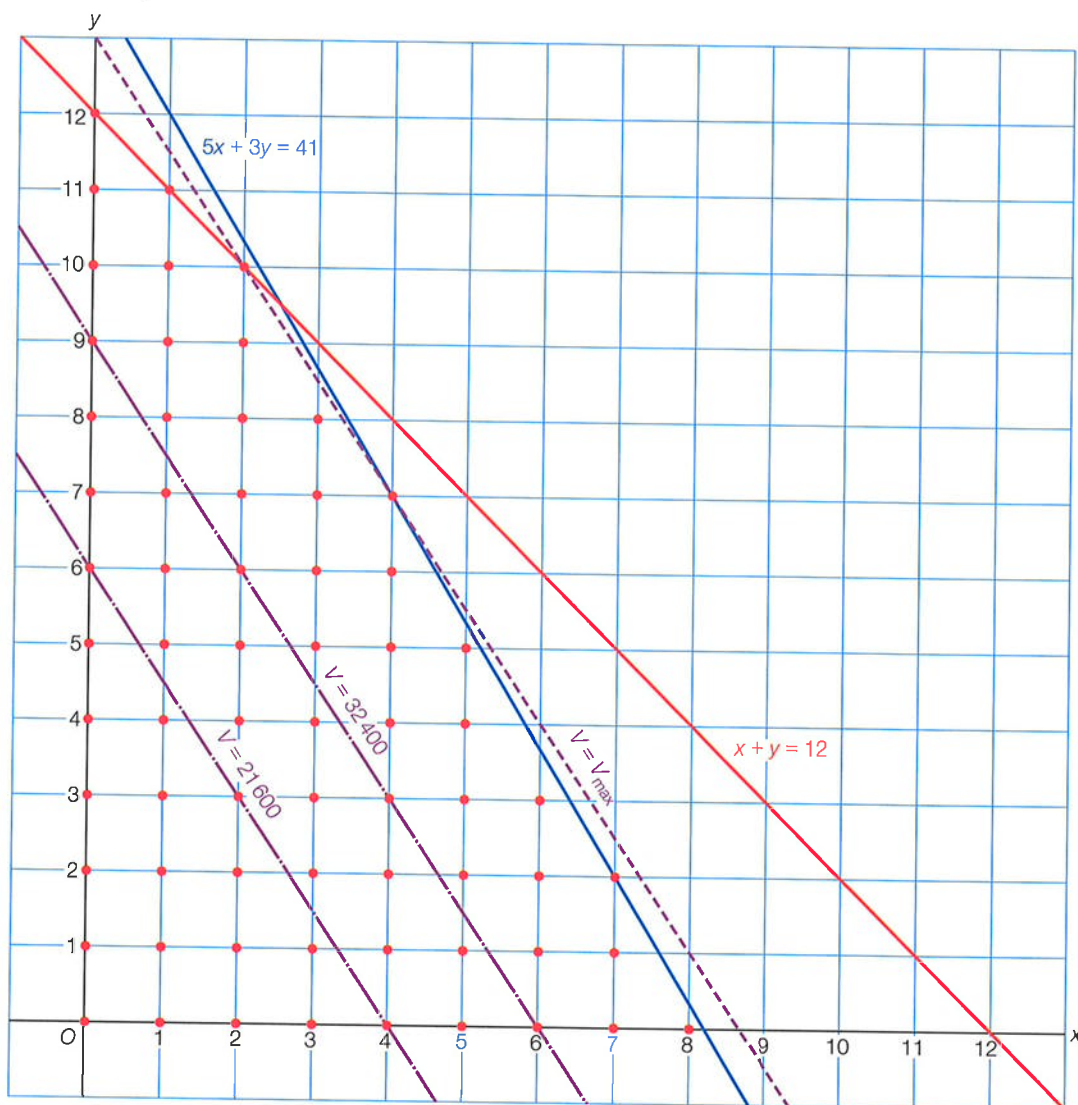


$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 5x + 3y = 41 \end{cases} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3y = 36 \\ 5x + 3y = 41 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -2x & = -5, \text{ dus } x = 2\frac{1}{2} \\ x + y = 12 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2\frac{1}{2} + y = 12 \\ y = 9\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

hoekpunt	$V = 5400x + 3600y$
$(0, 12)$	43 200
$(8\frac{1}{5}, 0)$	44 280
$(2\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2})$	47 700

b



Isolijn door $(4, 0)$ geeft $5400x + 3600y = 21\,600$ en gaat ook door $(0, 6)$.

Isolijn door $(6, 0)$ geeft $V = 32\,400$.

V is maximaal in de punten $(2, 10)$ en $(4, 7)$.

Dus bij 2 Amerikaanse en 10 Engelse vliegtuigen, of bij 4 Amerikaanse en 7 Engelse vliegtuigen.

40 x = aantal vierpersoonsvergaderruimten
 y = aantal twaalfpersoonsvergaderruimten

Doelfunctie: $W = 100x + 150y$.

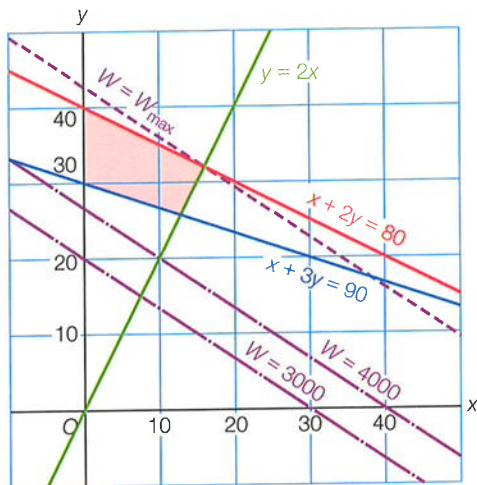
Beperkende voorwaarden: $x + 2y \leq 80$,

$4x + 12y \geq 360$, oftewel $x + 3y \geq 90$,

$y \geq 2x$ met x en y geheel.

Grenslijnen: $x + 2y = 80$ door $(0, 40)$ en $(80, 0)$,
 $x + 3y = 90$ door $(0, 30)$ en $(90, 0)$,
 $y = 2x$ door $(0, 0)$ en $(20, 40)$.

Alleen roosterpunten.



Isolijn door $(30, 0)$ geeft $100x + 150y = 3000$ en gaat ook door $(0, 20)$.

Isolijn door $(40, 0)$ geeft $W = 4000$.

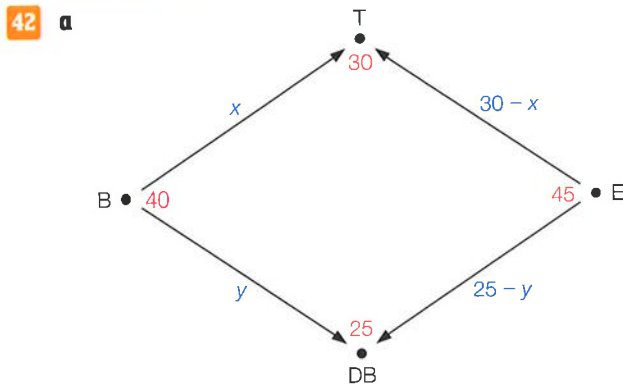
W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $x + 2y = 80$ en $y = 2x$. Dit snijpunt is $(16, 32)$.

Dus W is maximaal bij 16 vier- en 32 twaalfpersoonsvergaderplaatsen.

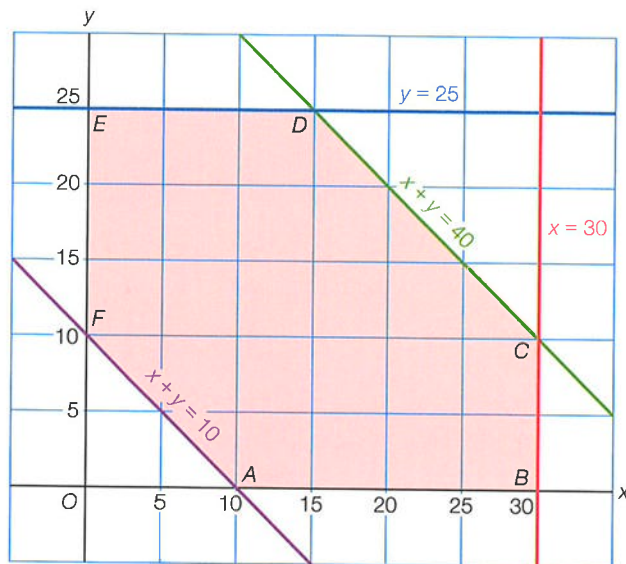
Bladzijde 159

- 41 a** Van Zutphen naar Apeldoorn $50 - 20 = 30$.
 Van Zutphen naar Doetinchem $60 - 30 = 30$.
 Transportkosten = $20 \cdot 15 + 30 \cdot 21 + 30 \cdot 9 + 30 \cdot 18 = 1740$ euro.
b Beperkende voorwaarde: $x + y \leq 90$.

Bladzijde 160



- b** Beperkende voorwaarden: $x \geq 0$, $y \geq 0$,
 $30 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 30$,
 $25 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 25$,
 $x + y \leq 40$,
 $30 - x + 25 - y \leq 45$, oftewel $x + y \geq 10$.
c Doelfunctie: $T = 25x + 35y + 15(30 - x) + 30(25 - y)$
 $= 25x + 35y + 450 - 15x + 750 - 30y$
 $= 10x + 5y + 1200$
 Grenslijnen: $x = 0$ en $y = 0$, $x = 30$, $y = 25$,
 $x + y = 40$ door $(0, 40)$ en $(40, 0)$,
 $x + y = 10$ door $(0, 10)$ en $(10, 0)$.
 Toegestane gebied: roosterpunten binnen en op de zeshoek $ABCDEF$.

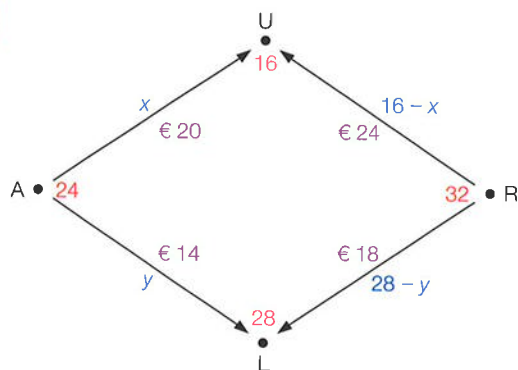


hoekpunt	doelfunctie T
$A(10, 0)$	1300
$B(30, 0)$	1500
$C(30, 10)$	1550
$D(15, 25)$	1475
$E(0, 25)$	1325
$F(0, 10)$	1250 ← minimaal

Bij minimale transportkosten gaan 0 bankstellen van Breda naar Tilburg en 10 bankstellen van Breda naar Den Bosch.

De minimale transportkosten zijn 1250 euro.

43

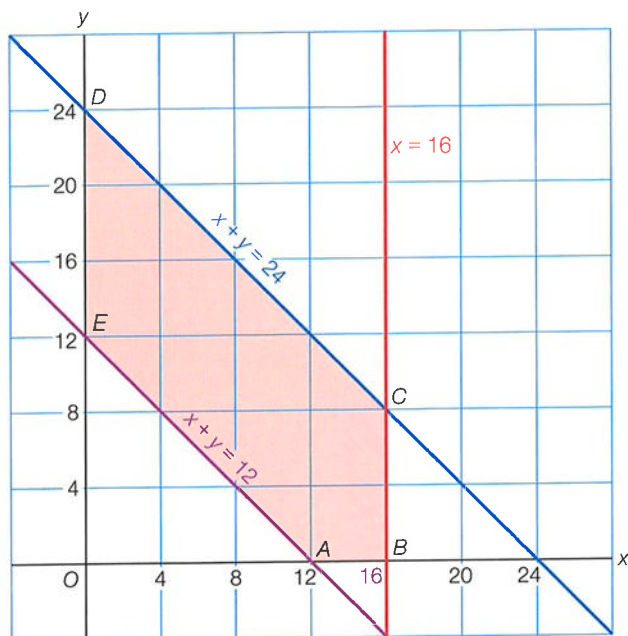


$$\begin{aligned}
 \text{Doelfunctie: } T &= 20x + 14y + 24(16 - x) + 18(28 - y) \\
 &= 20x + 14y + 384 - 24x + 504 - 18y \\
 &= -4x - 4y + 888
 \end{aligned}$$

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0$, $y \geq 0$,
 $16 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 16$,
 $28 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 28$,
 $x + y \leq 24$,
 $16 - x + 28 - y \leq 32$, oftewel $x + y \geq 12$.

Grenslijnen: $x = 0$, $y = 0$, $x = 16$, $y = 28$,
 $x + y = 24$ door $(0, 24)$ en $(24, 0)$,
 $x + y = 12$ door $(0, 12)$ en $(12, 0)$.

Toegestane gebied: roosterpunten binnen en op de vijfhoek $ABCDE$.



Isolijn door (8, 0) geeft $-4x - 4y + 888 = 856$, oftewel $x + y = 8$.

Isolijn door (16, 0) geeft $-4x - 4y + 888 = 824$, oftewel $x + y = 16$.

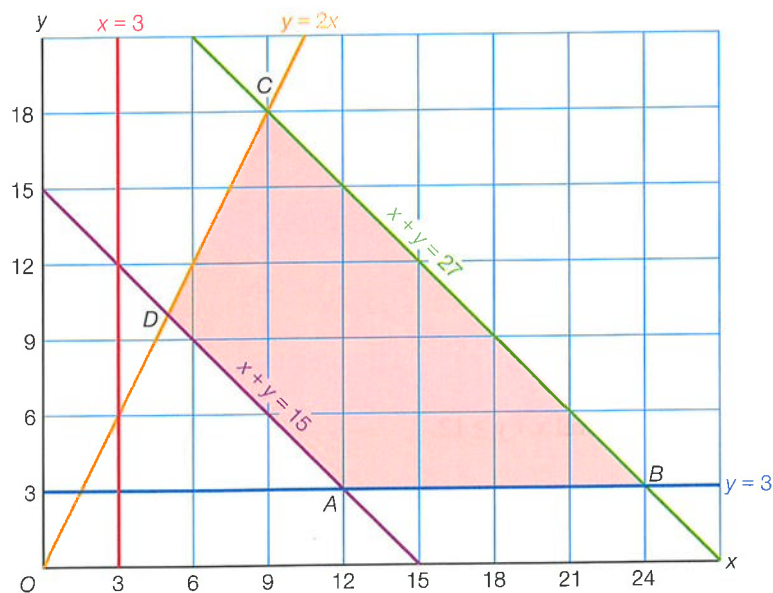
De isolijnen zijn dus evenwijdig met de randen AE en CD .

De transportkosten zijn dus minimaal voor de programma's (x, y)

met x en y geheel die op het lijnstuk CD liggen, met $C(16, 8)$ en $D(0, 24)$.

Bladzijde 161

- 44 a** Er wordt $30 - x - y$ miljoen euro ondergebracht bij C.
Beperkende voorwaarde: $30 - x - y \geq 3$, oftewel $x + y \leq 27$.
- b** $x + y \geq 15$ en $y \leq 2x$
- c** De opbrengst in miljoenen euro's is
 $R = 0,07x + 0,08y + 0,09(30 - x - y) = 0,07x + 0,08y + 2,7 - 0,09x - 0,09y = 2,7 - 0,02x - 0,01y$.
- d** De grenslijnen zijn $x = 3$, $y = 3$,
 $x + y = 27$ door (0, 27) en (27, 0),
 $x + y = 15$ door (0, 15) en (15, 0),
 $y = 2x$.



D is het snijpunt van $x + y = 15$ en $y = 2x$. Dit snijpunt is $D(5, 10)$.

hoekpunt	$R = 2,7 - 0,02x - 0,01y$
$A(12, 3)$	2,43
$B(24, 3)$	2,19
$C(9, 18)$	2,34
$D(5, 10)$	2,5 ← maximaal

R is maximaal voor $x = 5$ en $y = 10$.

Breng 5 miljoen euro onder bij fonds A, 10 miljoen euro bij fonds B en 15 miljoen euro bij fonds C.

45 $x = \text{aantal m}^2 \text{ A}$

$y = \text{aantal m}^2 \text{ B}$

Dan $6000 - x - y \text{ m}^2 \text{ C}$.

Doelfunctie: $K = 3x + 1,5y + 1 \cdot (6000 - x - y)$, dus $K = 2x + 0,5y + 6000$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,

$6000 - x - y \geq 0$, oftewel $x + y \leq 6000$,

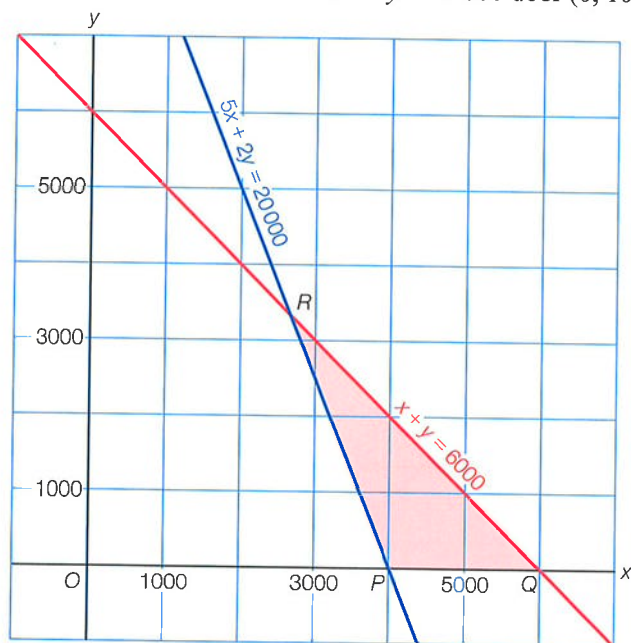
$5x + 8y + 10(6000 - x - y) \leq 40\,000$, oftewel $-5x - 2y + 60\,000 \leq 40\,000$,
oftewel $5x + 2y \geq 20\,000$.

Grenslijnen:

$x = 0, y = 0$,

$x + y = 6000$ door $(0, 6000)$ en $(6000, 0)$,

$5x + 2y = 20\,000$ door $(0, 10\,000)$ en $(4000, 0)$.



$$\begin{cases} x + y = 6000 \\ 5x + 2y = 20\,000 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 2y = 12\,000 \\ 5x + 2y = 20\,000 \end{cases} \begin{matrix} + \\ -3x = -8000, \text{ dus } x = 2666\frac{2}{3} \end{matrix} \left. \begin{matrix} 2666\frac{2}{3} + y = 6000, \text{ dus } y = 3333\frac{1}{3} \end{matrix} \right\}$$

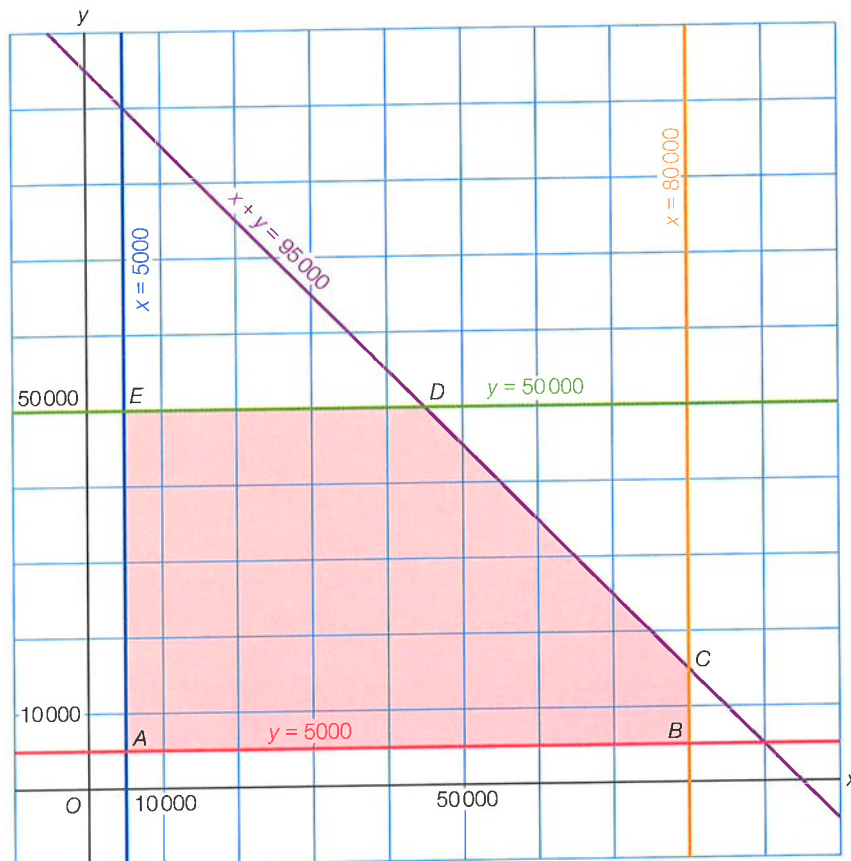
Dus $R(2666\frac{2}{3}, 3333\frac{1}{3})$.

hoekpunt	$K = 2x + 0,5y + 6000$
$P(4000, 0)$	14 000
$Q(6000, 0)$	18 000
$R(2666\frac{2}{3}, 3333\frac{1}{3})$	13 000 ← minimaal

Dus minimale afschrijvingskosten bij ongeveer $2667 \text{ m}^2 \text{ A}$, $3333 \text{ m}^2 \text{ B}$ en geen C.

46 x = aantal liter benzine y = aantal liter dieselDan $100\,000 - x - y$ liter LPG.Doelfunctie: $W = 0,15x + 0,12y + 0,10(100\,000 - x - y)$, dus $W = 0,05x + 0,02y + 10\,000$.Beperkende voorwaarden: $x \geq 5000$, $y \geq 5000$, $100\,000 - x - y \geq 5000$, oftewel $x + y \leq 95\,000$, $x + 100\,000 - x - y \geq 50\,000$, oftewel $y \leq 50\,000$, $y + 100\,000 - x - y \geq 20\,000$, oftewel $x \leq 80\,000$.

Grenslijnen:

 $x = 5000$, $y = 5000$, $x + y = 95\,000$ door $(0, 95\,000)$ en $(95\,000, 0)$, $y = 50\,000$, $x = 80\,000$.

hoekpunt	$W = 0,05x + 0,02y + 10\,000$	
$A(5000, 5000)$	10 350	
$B(80\,000, 5000)$	14 100	
$C(80\,000, 15\,000)$	14 300	← maximaal
$D(45\,000, 50\,000)$	13 250	
$E(5000, 50\,000)$	11 250	

Dus maximale winst bij 80 000 liter benzine, 15 000 liter diesel en 5000 liter LPG.

K.5 Lineair programmeren met Excel**Bladzijde 163**

47 a	hoekpunt	$W = 2x + 5y$	
	$A(16\frac{2}{3}, 0)$	$33\frac{1}{3}$	
	$B(10, 10)$	70	
	$C(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$	80	← maximaal
	$D(0, 15)$	75	

Het productieprogramma $(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$ en $W_{\max} = 80$ euro.

- b C is het snijpunt van de lijnen $3x + 3y = 60$ (machine I) en $1,5x + 6y = 90$ (machine III).
Dus van machine II wordt de capaciteit niet volledig benut.
Deze machine wordt $3 \cdot 6\frac{2}{3} + 2 \cdot 13\frac{1}{3} = 46\frac{2}{3}$ uur ingezet en is dus $50 - 46\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ uur onbenut.

hoekpunt	$W = 2x + 5y$
$A(16\frac{2}{3}, 0)$	$33\frac{1}{3}$
$B(9\frac{1}{3}, 11)$	$73\frac{2}{3}$
$C(7\frac{1}{9}, 13\frac{2}{9})$	$80\frac{1}{3} \leftarrow \text{maximaal}$
$D(0, 15)$	75

$W_{\max}$ wordt $80\frac{1}{3}$ in plaats van 80.

- d Eén uur langer machine III geeft beperkende voorwaarde $1,5x + 6y \leq 91$
en punt $C'(6\frac{4}{9}, 13\frac{5}{9})$ en hierbij hoort $W_{\max} = 2 \cdot 6\frac{4}{9} + 5 \cdot 13\frac{5}{9} = 80\frac{2}{3}$.
Deze $W_{\max}$ is meer dan die in vraag c, dus hij kiest voor machine III.
- e Deze machine heeft onbenutte uren. Je zou machine II zelfs $3\frac{1}{3}$ uur minder kunnen inzetten zonder dat $W_{\max}$ verandert.

Bladzijde 167

- 48 a Bij het snijpunt dat de optimale oplossing oplevert, horen de beperkende voorwaarden $5x + 2y \leq 100$ en $x + 4y \leq 150$.
- b De grens van voorwaarde III wordt niet bereikt, dus de winst zal niet toenemen als deze voorwaarde wordt verruimd.
- c De schaduwprijs is ongeveer 0,28, dus de nieuwe $W_{\max}$ is $119,44 + 0,28 = 119,72$.
Controleren met de computer geeft inderdaad $W_{\max} = 119,72$.
- d $W_{\max} = 112,5$
Het programma is $(0; 37,5)$.

voorwaarde	schaduwprijs	speling
I	0	87,5
II	0,44	0
III	0,31	0

- 49 a De doelfunctie is af te lezen in kolom F.
Omdat de functie geminimaliseerd wordt, hebben de beperkende voorwaarden een $\geq$ teken.
De beperkende voorwaarden I en II hebben geen speling en zijn af te lezen in kolom C en D: het linkerlid in rij 2 en 3, het rechterlid in rij 4.
Beperkende voorwaarde III is af te lezen in kolom E, maar heeft een speling van 9.
Dat betekent dat het rechterlid niet gelijk is aan het getal in cel E4, maar dat daar 9 vanaf getrokken moet worden.
- b $K_{\min} = 17,5$
- c $K_{\min} \approx 16,38$
- d Dit heeft geen invloed op $K_{\min}$, omdat $x + 6y = 27$ bij de optimale oplossing.
Verandert voorwaarde III in $x + 6y \geq 28$, dan heeft dit wel invloed, immers $28 > 27$.
- e De schaduwprijs bij voorwaarde I is gelijk aan 0,25. De minimale kosten moeten met $17 - 16,5 = 0,5$ afnemen, dus het rechterlid van voorwaarde I moet $18 - \frac{0,5}{0,25} = 16$ worden en voorwaarde I moet je veranderen in $2x + 3y \geq 16$.
Omdat bij voorwaarde II de schaduwprijs 1,25 is en $10 - \frac{0,5}{1,25} = 9,6$, moet je voorwaarde II veranderen in $2x + y \geq 9,6$.

Bladzijde 168

- 50 a *
- b $W_{\max} = 62,50$
Productieprogramma $(p, q, r, s) = (13,75; 0; 12,5; 11,25)$

c	voorwaarde	schaduwprijs	speling
	I	1,3	0
	II	0	11,25
	III	0,4	0
	IV	0,5	0

d Dan is $W_{\max} = 63,80$.

51 Je krijgt $W_{\max} \approx 695,27$ bij $(p, q, r, s) = (33,22; 62,20; 35,43; 28,57)$.

Bladzijde 169

52 Beperkende voorwaarde I is $p \geq 100 - q$, oftewel $p + q \geq 100$.
 Beperkende voorwaarde II is $p \geq 150 - q - r$, oftewel $p + q + r \geq 150$.
 Je krijgt $K_{\min} = 350$ bij $(p, q, r, s) = (50, 100, 0, 150)$.

53 a a = bedrag op de spaarrekening
 b = bedrag aan obligaties
 c = bedrag in aandelen I
 d = bedrag in aandelen II

Beperkende voorwaarden: $a + b + c + d \leq 100\,000$,
 $a + b > c + d$, oftewel $a + b - c - d > 0$,
 $a \geq 12\,000$,
 $c \geq \frac{1}{2}d$, oftewel $c - \frac{1}{2}d \geq 0$,
 $d \leq 50\,000$.

Doelfunctie: $R = 0,05a + 0,08b + 0,095c + 0,105d$.

- b $R_{\max} = €8723,33$
 bij €12 000 op de spaarrekening
 €38 000 aan obligaties
 €16 666,67 aan aandelen I
 €33 333,33 aan aandelen II.
- c Er wordt €33 333,33 in aandelen II belegd, dat is $50\,000 - 33\,333,33 = €16\,666,67$ minder dan het toegestane maximum.
- d De schaduwprijs bij voorwaarde III (over het spaarbedrag) is $-0,03$.
 Omdat $15\,000 - 12\,000 = 3000$ zal de maximale jaaropbrengst met $3000 \cdot 0,03 = 90$ euro dalen als de voorwaarde $a \geq 15\,000$ wordt.
- e Dat betekent dat als de voorwaarde $a + b - c - d > 0$ wordt gewijzigd in $a + b - c - d > 1$, de maximale jaaropbrengst €0,0108 minder wordt.
 $a + b - c - d > 1$, oftewel $a + b > c + d + 1$ betekent dat er 1 euro meer aan sparen en obligaties wordt besteed dan aan aandelen.
- f De schaduwprijs bij voorwaarde I is 0,090833.
 Dus de maximale jaaropbrengst zal met $10\,000 \cdot 0,090833 \approx €908,33$ stijgen.

Bladzijde 170

- 54 a $W = 640x + 560y + 480z$
- b Constructieafdeling: $6x + 3y + 9z \leq 900$
 Bekledingsafdeling: $4x + 3y \leq 600$
 Afwerkingsafdeling: $x + y + z \leq 200$
- c $W_{\max} = 115\,200$ euro
 Er worden 60 fauteuils, 120 sofa's en 20 tafels gemaakt.
- d De schaduwprijs bij de afwerkingsafdeling (384) is veel hoger dan die bij de constructieafdeling (10,67). Verder is er op beide afdelingen geen speling.
- 55 a Ja: bij 870 uur op de constructieafdeling en 230 uur op de afwerkingsafdeling is $W_{\max} = 126\,400$ euro.

b Dit is mogelijk.

Gebruik de beperkende voorwaarden

$$6x + 3y + 9z \leq 900$$

$$4x + 3y \leq 580$$

$$x + y + z \leq 220$$

$$x \geq 25, y \geq 25 \text{ en } z \geq 25$$

Je krijgt $W_{\max} = 120\,000$ euro.

Er worden dan 25 fauteuils, 160 sofa's en 30 tafels gemaakt.